Εξέταση Ιουνίου 2020 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντες Ε. Νικολιδάκης και Χ. Σαρόγλου

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μπορεί σε κάθε ερώτηση να υπάρχουν και δύο σωστές απαντήσεις.

Ερώτηση 1. Δίνεται φραγμένη συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1,\ x \in \mathbb{Q} \cap [0,2]$. Τότε,

(i) Υπάρχει διαμέριση P του $[0,2]$, ώστε $L(f,P) > 2$.

(ii) $\overline{\int_0^2} f(x)dx > 2$.

(iii) $\underline{\int_0^2} f(x)dx < 2$.

(iv) Για κάθε διαμέριση P' του $[0,2]$, ισχύει $U(f,P') \geq 2$.

Ερώτηση 2. Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ να συγκλίνει. Τότε

(i) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ είναι συγκλινουσα.

(ii) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ είναι συγκλινουσα.

(iii) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^n$ είναι συγκλινουσα.

(iv) Η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ικανοποιεί την ανισότητα $R \geq 1$.

Ερώτηση 3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ ώστε $\displaystyle\int_0^1 \left(e^{f(x)} - 1\right) dx = 0$. Τότε

(i) $\displaystyle\int_0^1 e^{f(x)-1} dx = \frac{1}{e^2}$.

(ii) $\displaystyle\int_0^1 x e^{f(x)} dx = \frac{1}{2}$.

(iii) υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) < 0$.

(iv) υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) > 0$.

Ερώτηση 4. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,4] \to (0,+\infty)$ ώστε $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx = 4$. Τότε

(i) υπάρχει $x_0 \in [0,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$.

(ii) υπάρχει $x_0 \in [0,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$.

(iii) υπάρχει $x_0 \in [0,4]$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)dx = 3$.

(iv) υπάρχει $x_0 \in [0, \frac{1}{2}]$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)dx = 2$.

Ερώτηση 5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & , \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ x^2 & , \quad x \in (1,2] \end{cases}$$

Τότε

(i) η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1, 3/2]$.

(ii) η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1/2, 3/2]$.

(iii) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[3/4, 3/2]$.

(iv) ισχύει $\displaystyle\overline{\int_0^1} f(x)dx < \underline{\int_1^2} f(x)dx$.

Ερώτηση 6. Δίνεται συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & , \quad x \in (0,1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Τότε

(i) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(ii) η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1/3]$.

(iii) η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[1/2, 1]$.

(iv) η f είναι συνεχής στο $[0, 1/2]$.

Ερώτηση 7. Δίνεται η ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ να συγκλίνει. Τότε

(i) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n}$ είναι συγκλινουσα.

(ii) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{{a_n}^2}$ είναι συγκλινουσα.

(iii) Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n}$ αποκλίνει.

(iv) Δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{{a_n}^2}$ είναι συγκλινουσα ή όχι.

Ερώτηση 8. Δίνεται φθίνουσα συνάρτηση $f\colon [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_3^{+\infty} f(x)dx$ να συγκλινει. Τότε

(i) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n f(2^n)$ συγκλίνει.

(ii) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e^{f(n)}$ συγκλίνει.

(iii) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx$ συγκλίνει.

(iv) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)dx$ συγκλινει ή όχι.

Ερώτηση 9. Δίνονται φραγμένη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ και οι διαμερίσεις $P_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $P_2 = \{0, \frac{1}{3}, 1\}$, $P_3 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$, $P_4 = P_1 \cup P_2$ του $[0,1]$. Τότε

(i) $L(f, P_2) \leq L(f, P_3)$.

(ii) $L(f, P_3) \leq L(f, P_4)$.

(iii) $U(f, P_3) \leq U(f, P_1)$.

(iv) $L(f, P_1) \leq L(f, P_4)$.

Ερώτηση 10. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός της f στο $(0,1]$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε

(i) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(0,3]$.

(ii) δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής ή όχι στο διάστημα $(0,2]$.

(iii) η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(iv) δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(4,7]$.

Ερώτηση 11. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x}$. Τότε

(i) η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(1,+\infty)$.

(ii) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,0)$.

(iii) η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(-\infty,-1)$.

(iv) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Ερώτηση 12. Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $(0,1)$ και $[1,+\infty)$. Τότε

(i) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(ii) το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(iii) αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών τέτοιες, ώστε

$$x_n, y_n \to +\infty \text{ και } x_n - y_n \to 0, \text{ τότε } f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

(iv) αν $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, τότε υπάρχει τό όριο $\lim_n f(x_n)$ και είναι πραγματικός αριθμός.